Álgebra I
Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

   i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   i) $3 \in A$ iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$ vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ x) $\emptyset \subseteq A$
   ii) $\{3\} \subseteq A$ v) $\{1, 2\} \in A$ viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$ xi) $A \in A$
   iii) $\{3\} \in A$ vi) $\{1, 2\} \subseteq A$ ix) $\emptyset \in A$ xii) $A \subseteq A$

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

   i) $A = \{1, 2, 3\}, \; B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
   ii) $A = \{1, 2, 3\}, \; B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
   iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\}, \; B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$
   iv) $A = \{\emptyset\}, \; B = \emptyset$

4. Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

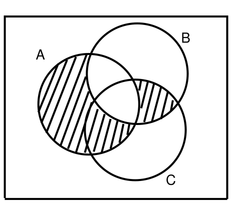
   i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

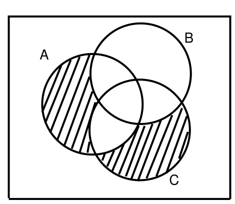
5. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

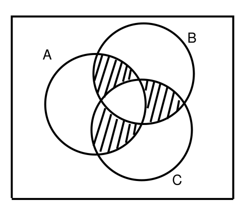
6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

   i) $(A \cup B^c) \cap C$ ii) $A \triangle (B \cup C)$ iii) $A \cup (B \triangle C)$

7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

   i) 

   ii) 

   iii) 

8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

   i) $A = \{1\}$ ii) $A = \{a, b\}$ iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

9. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

    i) $p \Rightarrow q$, $\quad \sim q \Rightarrow \sim p$, $\quad \sim p \vee q \quad$ y $\quad \sim (p \wedge \sim q)$.

    Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una *demostración por* ***contrarrecíproco***, mientras que cuando se prueba en su lugar que suponer que vale $p \wedge \sim q$ lleva a una contradicción, se dice que es una *demostración por* ***reducción al absurdo***.

    ii) $\sim (p \Rightarrow q) \quad$ y $\quad p \wedge \sim q$.

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

    i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.
    ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
    iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

12. i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

    (a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \vee \ n \leq 8$.
    (b) $\exists\, n \in \mathbb{N} /\ n \geq 5 \ \wedge \ n \leq 8$.
    (c) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N} \ /\ m > n$.
    (d) $\exists\, n \in \mathbb{N} /\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ m > n$.
    (e) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$.
    (f) Si z es un número real, entonces z es un número complejo.

    ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

    iii) Reescribir las proposiciones ***e)*** y ***f)*** del ítem **i)** utilizando las equivalencias del ejercicio ***10i)***.

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

    i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$
    ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$
    iii) $C \subseteq A \ \Rightarrow \ B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$
    iv) $A \triangle B = \emptyset \ \Leftrightarrow \ A = B$

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

    i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
    ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
    iii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$
    iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$
    v) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \triangle B = B \cap A^c$
    vi) $A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ B^c \subseteq A^c$
    vii) $A \cap C = \emptyset \ \Rightarrow \ A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

    i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
    ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
    iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
    iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

Relaciones

17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$

ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$

iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$

iv) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$

18. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B:

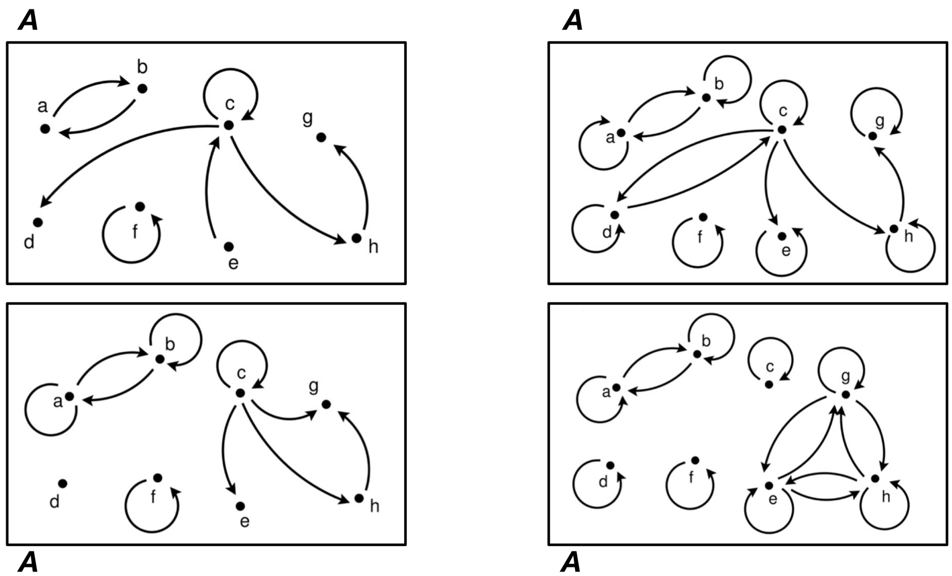
i) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

iv) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

19. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

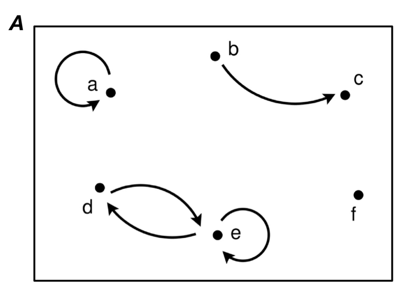


20. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(6,4),(4,6),(4,4),(6,6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

21. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva,

ii) simétrica,

iii) transitiva,

iv) reflexiva y simétrica,

v) simétrica y transitiva,

vi) de equivalencia.

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

    i) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$
    ii) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, a+b \text{ es par}\}$
    iii) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,/\, |a| \le |b|\}$
    iv) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a\,\mathcal{R}\,b \;\Leftrightarrow\; b$ es múltiplo de a
    v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \;\Leftrightarrow\; X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}$
    vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N}/n \le 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \;\Leftrightarrow\; 2 \notin X \cap Y^c$
    vii) $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \;\Leftrightarrow\; bc$ es múltiplo de ad.

23. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

    i) simétricas y antisimétricas
    ii) de equivalencia y de orden

    ¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

24. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

    hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

25. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\big\{\{1,3\},\{2,6,7\},\{4,8,9,10\},\{5\}\big\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

26. Sean $P = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ el conjunto de partes de $\{1,\dots,10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P definida por

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$

    i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica (*Sugerencia:* usar adecuadamente el ejercicio **14iii)**).
    ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1,2,3\}$.

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N}/n \le 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$$

    i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia ¿Es antisimétrica?
    ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$.

28. i) Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Consideremos en $\mathcal{P}(A)$ la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos de A están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.
    ii) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada por el cardinal: dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

Funciones

29. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

    i) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,c),(3,d)\}$

ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$
iv) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,/\, a = 2b - 3\}$
v) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,/\, a = 2b - 3\}$
vi) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b$ es divisible por $5\}$

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$
ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$
iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, 2z)$
iv) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$
vi) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

31. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n, m) = n(m+1),$$

calcular, de ser posible, $(f \circ g)(3, 4)$, $(f \circ g)(2, 5)$ y $(f \circ g)(3, 2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(n) = \sqrt{n},$$

hallar, si existen, todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(m) = 15$.

32. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (cuando sea posible) en los casos

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 18 \quad$ y $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 3$
ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n + 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) = 4n$
iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x) = (x + 5, 3x) \quad$ y $\quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(n) = \sqrt{n}$

33. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto $\mathbb{N}$.

34. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \longrightarrow C$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.
ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva
iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva
iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva
v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva

35. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1, \ldots, 10\} \longrightarrow \{1, \ldots, 10\} \ / \ f$ es una función **biyectiva**$\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff \exists n \in \{1, \ldots, 10\} \ / \ f(n) = 1 \ \textbf{y} \ g(n) = 1$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia ¿Es antisimétrica?
ii) Sea $\mathrm{Id} : \{1, \ldots, 10\} \longrightarrow \{1, \ldots, 10\}$ la función identidad, o sea, $\mathrm{Id}(n) = n,\ \forall n \in \{1, \ldots, 10\}$. Dar tres elementos **distintos** de la clase de equivalencia de Id.

Importante: al exhibir una función es indispensable definirla en **todos** los elementos de su dominio.

36. Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ una función. Consideremos el conjunto de **todas** las funciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, es decir,

$$\mathcal{F} = \Big\{ g : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Big\}$$

y definimos sobre $\mathcal{F}$ la relación dada por

$$g \, \mathcal{R} \, h \iff g \circ f = h \circ f$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia ¿Es siempre antisimétrica (sin importar cómo sea f)?

ii) Asumiendo que f es sobreyectiva, calcular la clase de equivalencia de cada $g \in \mathcal{F}$.